Ueber die neuesten

Untersuchungen

in Betreff unserer Anschauung vom Raume.

Ein Vortrag

gehalten

zur Habilitation an der Universität Breslau

am 30. April 1870

von

J. Rosanes,

Dr. phil.

Breslau.

Verlag von Maruschke & Berendt.

1871.

Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume.

Ein Vortrag

gehalten

zur Habilitation an der Universität Breslau

am 30. April 1870

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

von

J. Rosanes,

Dr. phil.

Breslau.
Verlag von Maruschke & Berendt.
1871.

Vorwort.

Wenn ich die nachfolgenden Zeilen der Oeffentlichkeit übergebe, so geschieht es nicht, weil ich der Meinung bin, durch meine Darstellung die Schwierigkeiten überwunden zu haben, welche sich der Fundamental-Frage der Geometrie und insbesondere dem Verständniss der Arbeiten von Riemann, Helmholtz u. A. entgegenstellen. Es ist lediglich meine Absicht, zur allgemeineren Verbreitung der durch die neuesten Untersuchungen hineingetragenen Ideen und zur Erschütterung von Vorurtheilen beizutragen, welche für die Wissenschaft nur hinderlich sein können.

Dieser Versuch wird, hoffe ich, einem Theile desjenigen für die Frage interessirten Publicums nicht unwillkommen sein, welchem die bezüglichen Arbeiten der Natur der Sache nach unbekannt oder unzugänglich sein müssen.

Breslau, im October 1870.

J. Rosanes.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543119_0093

Hochgeehrte Versammlung!

Es ist ein Herkommen, welches in jeder Wissenschaft befolgt zu werden pflegt, Gegenstand und Ziele derselben in einer kurz gehaltenen Erklärung zusammenzufassen, um dadurch auch in den ihr ferner Stehenden eine Vorstellung von ihnen zu erwecken.

Als die Aufgabe der mathematischen Wissenschaften darf man die Erforschung der Gesetze bezeichnen, welche die allgemeinsten Beziehungen und Abhängigkeits-Verhältnisse zwischen Grössen beherrschen. Die Mathematik des Alterthums gestattete diese Definition noch keineswegs, sie bietet — auch für den nicht ganz oberflächlichen Beurtheiler — eine ziemlich entfernte Aehnlichkeit mit dem, was wir heute unter demselben Namen begreifen, und nur der geschärftere Blick des Forschers weiss die Fäden zu finden, welche Apollonius mit Steiner, Archimedes mit Galilei, Newton und Leibnitz verknüpfen.

Dass man jetzt die Ziele so weit hinstellen darf, muss auf die grossartige Arbeit zurückgeführt werden, deren Geschichte an den Namen Newton's anknüpft. Sie unterwirft sich so die gesammte Forschung in der Natur, indem sie ihre verschiedenen Gebiete durchdringt, — wie sie sich bereits der Physik zum grossen Theile bemächtigt hat, deren Aufbau auf rein mechanischen Principien continuirlich fortschreitet. Denn wenn dieser mächtige Zweig der Naturwissenschaft dem

Ziele zustrebt, alle Erscheinungen auf Kräfte zurückzuführen, die von Punkt auf Punkt wirken, so ist damit zugleich die Möglichkeit nahe gebracht, jedes physikalische Problem auf ein ihm aequivalentes aus der reinen Mathematik zu reduciren.

Allein bei diesem raschen Fortschreiten gelangte man nicht oft dazu, auf die ersten Principien zurückzukommen, und begünstigte so den nicht selten gehörten Vorwurf, dass die mathematische Forschung den Blick wenig nach rückwärts gerichtet halte, sowohl in Rücksicht auf die historische Entwicklung, als auch in Ansehung der zu Grunde liegenden Principien.

Es ist die Absicht dieses Vortrages nicht, derartige allgemeine Vorwürfe zu entkräften oder auf ihre richtige Erklärung zurückzuführen; an einem Beispiele nur, doch an einem überaus wichtigen, will ich, soweit Zeit und Ort es gestatten, den wahren Sinn solcher scheinbaren Vernachlässigung klar zu legen suchen.

Die mathematischen Wissenschaften zeichnen sich, trotz ihrer so weit gesteckten Ziele, durch die Einfachheit der zu Grunde liegenden Voraussetzungen aus. Zwei Zweige allein, an Fruchtbarkeit und Reichhaltigkeit allen anderen ebenbürtig, unangezweifelt in Bezug auf die Gewissheit ihrer Resultate, — die Geometrie und die Mechanik — sie können, der Natur ihres Gegenstandes nach, mit jenen allein nicht ausreichen; sie bedürfen auch noch der Begriffe, die ihr Material ausmachen, und ausserdem weniger Postulate.

Diese so getrennten fundamentalen Voraussetzungen bieten in verschiedenem Sinne verschiedene Schwierigkeiten und haben demgemäss verschiedene Behandlung gefunden. Ich werde, soweit es zur Würdigung der hierauf bezüglichen neuesten Untersuchungen erforderlich ist, das Verhalten der Vorgänger in Kürze andeuten und mich, wie überhaupt für die Folge, auf die Geometrie allein beschränken.

Das Material der Geometrie ist der Raum, und die Frage nach dem Begriffe und dem Wesen desselben hat wohl zu allen Zeiten die Mathematiker beschäftigt, aber sie wurde mehr in Bezug auf die allgemeine Weltanschauung studirt; vereint mit den Philosophen, mit welchen sie in der Person grossentheils zusammenfielen, suchten sie wohl eine Vorstellung hierüber zu gewinnen, aber die Geometrie als Wissenschaft galt kaum für abhängig von der jeweiligen Art derselben.

Unter den Philosophen ragt in Bezug auf diesen Gegenstand insbesondere Kant hervor. Dieser ausgezeichnete Denker war durch den eigenthümlichen Gang seiner Forschung, der sich so wesentlich von dem seiner Vorgänger unterscheidet, vor allem Andern darauf gewiesen, über Raum und Zeit zu einer richtigen Vorstellung zu gelangen, und man weiss, von welcher Bedeutung dieselbe war bei seiner Untersuchung über das Wesen unserer Erkenntniss.

Nach Kant[1]) ist der Raum „kein empirischer Begriff, der von äusseren Erfahrungen abgezogen worden", sondern „eine nothwendige Vorstellung a priori, die allen äusseren Anschauungen zu Grunde liegt" nur die nothwendige Form aller Anschauung.

Hierdurch gewinnt Kant die Möglichkeit, synthetische Urtheile a priori zu construiren, wie er solche ganz unzweifelhaft in der Geometrie vorzufinden meinte.

Ich habe diese Ansicht besonders hervorgehoben, nicht nur wegen des grossen Scharfsinnes ihres Vertreters, sondern hauptsächlich, weil dieselbe lange Zeit auch in Kreisen der exacten Wissenschaften die herrschende war. Ich nenne in dieser Hinsicht nur den berühmten Physiologen Johannes Müller.

Uebrigens ist bei Kant der innere Grund für seine Ueberzeugung wohl umgekehrt in der Gewissheit zu suchen, in der Mathematik wirklich synthetische Urtheile a priori zu

---

[1]) Kritik der reinen Vernunft, 1781. p. 23 f.

besitzen. Hätte er es für möglich gehalten, an Letzterem zu zweifeln, er wäre vielleicht von seiner Ansicht über den Raum zurückgekommen.

In neuerer Zeit ist man wohl überwiegend zu der von Helmholtz sogenannten empiristischen Theorie übergegangen, zu welcher sich schon frühzeitig Gauss bekannt haben soll, wonach man im Raume Nichts als einen von der Empirie abstrahirten Begriff zu sehen habe, eine Ansicht, welche schon vor Kant insbesondere bei dem englischen Sensualisten Locke auftritt.

Auf diese Weise war aber die Frage nach dem Begriffe des Raumes und seinen ursprünglich aus unserer Anschauung entnommenen Eigenthümlichkeiten mehr Gegenstand der auf das Wesen unserer Gesammt-Erkenntniss gerichteten Speculation, keineswegs aber als von Einfluss auf die Gewissheit der Geometrie angesehen.

Wesentlich anders verhält es sich mit jenen Voraussetzungen, welche nicht als Begriffs-Erklärungen, sondern als wirkliche Sätze auftretend, ohne Beweis eine unbedingte Anerkennung forderten. Ich meine damit die Postulate der Geometrie, hauptsächlich das 11. Axiom des Euklides, welches sich auf den Parallelismus bezieht.

War man auch von der Richtigkeit desselben überzeugt, so blieb doch die Unmöglichkeit, es zu beweisen, eine störende, ich möchte sagen, beschämende Thatsache. Seit zweitausend Jahren war die Mathematik in einem Masse fortgeschritten, das alle Erwartungen übertraf; immer neue Zweige waren entstanden und hatten früher nicht geahnte Anwendung gefunden, und dieses ganz elementare Postulat stand noch immer da, unbewiesen und dennoch nicht unbeweisbar, wie es schien.

Für die Unbeweisbarkeit fehlte wenigstens jeder entscheidende Grund, und man war vielmehr lange Zeit der Meinung, der Satz müsse in aller Strenge aus den voraus-

gesetzten Begriffen mit Hülfe rein logischer Verknüpfung gefolgert werden können.

Wenn nun zwar die Koryphäen der Wissenschaft sich im Allgemeinen mit einem gewissen Takte von dieser Frage fern gehalten haben, so hat es gleichwohl an Männern nicht gefehlt, welche ihren ganzen und grossen Scharfsinn an deren Lösung setzten, darunter der berühmte französische Mathematiker Legendre.

Gelang es auch nicht, den Grundsatz in befriedigender Art zu demonstriren, so wurde doch an der Richtigkeit desselben nicht gezweifelt; die ausgeführten Messungen verbürgten wenigstens die annähernde Genauigkeit und alle zum Beweise eingeschlagenen Wege führten rückwärts auf Sätze, welche der Anschauung überaus klar und einsichtig erschienen, wenn sie gleich ohne deren Hülfe, rein aus den Definitionen der Geraden und der Ebene, nicht gefolgert werden konnten.

Und wenn es ein vortreffliches Mittel ist, für die Richtigkeit der von uns gefundenen Wahrheiten die Erfahrung als Prüfstein zu wählen, wenn man bedenkt, dass wir nicht einmal sicher wissen, ein wie grosser Theil unserer wissenschaftlichen Errungenschaften den Stempel der Empirie trägt, so durfte der Inhalt jenes Postulates so gut, wie irgend Etwas, als bewährt angesehen werden. Denn jeder neue Satz erschien als eine neue Verification, und die Wahrscheinlichkeit für seine Richtigkeit durfte stärker angenommen werden, als für irgend eine aus der Erfahrung gewonnene Thatsache.

Sicherlich darf auch dieser Umstand als der wahre Grund dafür angesehen werden, dass von der grossen Anzahl derer, welche der Frage ihre Arbeit widmeten und von Jahr zu Jahr mit neuen, immer wieder für unwiderlegbar ausgegebenen Beweisen auftraten, fast Keiner es gewagt hat, die Richtigkeit des Satzes selbst in Zweifel zu ziehen.

Eine tiefer gehende Untersuchung der neuesten Zeit hat jedoch dargethan, dass der wahre Grund für diese glückliche

Uebereinstimmung in den Folgerungen ein ganz anderer war und keinen unbedingten Schluss auf die Wahrheit des Postulates gestattete.

In der That wurden, zuerst wohl in den dreissiger Jahren dieses Jahrhunderts, Zweifel an der Zuverlässigkeit des Enklideischen Axioms ausgesprochen. Bolyai und Lobatschewsky[1]) wiesen nach, dass man auch dann eine widerspruchsfreie, aber von der Enklideischen verschiedene Geometrie construiren kann, wenn man den Satz, nach welchem die Summe der Winkel im ebenen Dreiecke gleich zwei Rechten ist, aufgiebt, von dem Legendre gezeigt hat, dass er mit jenem Axiom aequivalent ist. Diese Geometrie, gegründet auf die Annahme, dass die Winkelsumme irgend einen constanten Werth unter 180^0 habe, wurde imaginäre, Nicht-Enklideische Geometrie genannt. Sie blieb jedoch wenig beachtet, selbst nachdem bekannt geworden war, dass Gauss,[2]) auch in dieser Frage seinen Zeitgenossen vorauseilend, schon seit 1792 denselben Gedanken gefasst hatte.

Dies war etwa die Sachlage; man war im Ganzen wenig geneigt, neue Arbeiten über den Gegenstand zu prüfen, zumal seit längerer Zeit fast nur unbedeutendere Kräfte und Liebhaber von Paradoxen sich mit der Frage beschäftigten. Ueberzeugt nach und nach von der Richtigkeit, doch auch Unbeweisbarkeit, schien man sich nach stiller Uebereinkunft in Schweigen zu einigen.

Da erschien vor etwa zwei und einem halben Jahre eine Schrift von einem Manne, den die wissenschaftliche Welt

1) J. Bolyai, Appendix zu W. Bolyai's Tentamen in elem. math. etc.; Lobatschewsky in verschiedenen Schriften, siehe Genaueres hierüber in Baltzer's Elem. d. Math. II. p. 16 der 3. Aufl.

2) Goett. gelehrte Anz. 1816 p. 617, 1822 p. 1725, Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher Thl. II. p. 268 und 431.

gewohnt war, nur die subtilsten Gebiete cultiviren, ja zum Theil neu schaffen zu sehen, von Bernhard Riemann.[1])

Wie sehr ungünstig die Stimmung für diese Frage mit der Zeit geworden war, mag eine Stelle von Helmholtz characterisiren. Helmholtz war zu einem Theile der Riemann'schen Resultate selbstständig gelangt, doch sind sie erst später veröffentlicht worden. Er sagt:[2]) „Uebrigens muss ich bekennen, dass wenn auch durch die Veröffentlichung von Riemann's Untersuchungen die Priorität in Bezug auf eine Reihe meiner eigenen Arbeitsresultate vorweg genommen ist, es für mich bei einem so ungewöhnlichen und durch frühere Versuche eher discreditirten Gegenstande von nicht geringem Gewichte war, zu sehen, dass ein so ausgezeichneter Mathematiker dieselben Fragen seines Interesses gewürdigt hatte, und dass es mir eine gewichtige Bürgschaft für die Richtigkeit des eingeschlagenen Weges war, ihn als Gefährten darauf anzutreffen."

Kaum konnte der Gegenstand durch einen bedeutenderen Namen, als den Riemann's, wieder eingeführt werden. Mit äusserster Consequenz behandelt ihn Riemann von der abstractesten Seite und zwingt uns zur Bewunderung der grossen Sicherheit, mit der er sich von den Schranken der Anschauung frei zu machen weiss.

Wiewohl übrigens eine solche Publikation für die fernere Behandlung des Gegenstandes als entscheidend zu betrachten sein musste, sieht man dennoch Viele in Vorurtheilen befangen, die es ihnen nicht gestatten, den alten Weg zu verlassen. Noch vor wenigen Monaten wurde ein neuer Beweis des Enklideischen Postulates (von Carton) der Pariser Academie der Wissenschaften durch Bertrand, einen namhaften

---

1) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abhandl. der kgl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen. XIII. 1867. p. 133.

2) Nachrichten von der Kgl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen 1868. p. 195.

Mathematiker, vorgelegt. Dieser Akademiker erblickt in den Versuchen von Lobatschewsky und Anderen, die das Axiom für nicht unzweifelhaft halten, nichts als die Sucht zu disputiren und meint, dass die „esprits de bonne foi“ es als evident anerkennen müssen. Gleichwohl hält er es für gut, den erwähnten Beweis mitzutheilen, von dessen vollkommener Strenge er überzeugt ist[1]).

So wurden die Forschungen ignorirt, die einen neuen Standpunkt einnehmen gelehrt hatten, und man beharrte dabei, als sichere Ergebnisse aus der Anschauung Behauptungen hinzustellen, über welche eine strengere Kritik andere Urtheile geliefert hatte.

Ich kehre zu Riemann zurück. Die Forderung, alle Eigenschaften des Raumes aus der Erkenntniss seines Wesens, d. h. der zu seiner Definition geeigneten Merkmale herzuleiten, wird von ihm aufgefasst als das Problem: eine Hypothese aufzustellen, welche gestattet, aus möglichst wenigen Voraussetzungen solche Folgerungen zusammenzusetzen, welche mit unserer eigenthümlichen Anschauung in Einklang stehen. Er erkannte, dass um nicht in die Fehler der Vorgänger zu verfallen, sondern genau unterscheiden zu können zwischen dem, was sich aus klar ausgesprochenen Voraussetzungen folgern lässt, und dem, was wir nur durch Vermittelung unserer Anschauung erfassen, es nothwendig sei, den Raum als besonderen Fall unter einen allgemeineren Begriff zu subsumiren. Zu

---

1) Dieser Beweis zeichnet sich übrigens vor anderen derartigen Versuchen in keiner Weise aus. Auch nachdem Herrn Bertrand von verschiedenen Seiten Zuschriften, die gegen ihn protestirten und auf seine Schwächen hinwiesen, zugegangen waren, begnügte er sich mit der Erklärung, dass er von der Richtigkeit desselben überzeugt wäre, und setzte allen Einwänden den Hinweis auf die „allgemeine Evidenz“ entgegen. Vgl. R. Baltzer, Ber. der kgl. Sächs. Ges. d. W. 1870. p. 95 f.

diesem Zwecke definirt er eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Dingen als eine solche, in der das Einzelne einer mehrfachen Bestimmungsart fähig ist. Jede Bestimmungsart für sich repräsentirt eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit in Bezug auf das in ihr definirte Einzelne, das Element der Mannigfaltigkeit.

Dieser abstracte Begriff wird verständlicher werden, wenn ich ihn durch ein — wenn auch sehr specielles — Beispiel erläutere. — Zieht man in einer Ebene eine Gerade, so bildet diese eine (stetige) einfache Mannigfaltigkeit, deren Elemente die Punkte in ihr sind. Denkt man sich in der Ebene parallele Geraden zu der ersten gezogen, so bilden sie eine (stetige) einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, deren Elemente die Geraden sind. In Bezug auf das Element der ersten Mannigfaltigkeit bildet das jetzige Feld eine (stetige), zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Das Element (der Punkt) ist zweifacher Bestimmungsart fähig; es kann erstens auf einer Geraden variiren und dann von einer Geraden zur andern. Doch darf dieses Beispiel, sowie die Ausdrucksweise „mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit“ nicht verleiten, bei dem allgemeinen Begriffe immer an Gegenstände der Anschauung zu denken; vielmehr ist die äusserste Abstraction von der letzteren die Hauptsache bei der allgemeinen Untersuchung.

Ueberhaupt repräsentirt jede beliebige Linie eine einfach, jede beliebige Fläche eine zweifach, der Raum eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

Das Element, bei Anwendung auf Raumgrössen der Punkt, ist jedesmal durch so viele Bestimmungen (Zahlengrössen) definirt, wie die Vielfachheit der Mannigfaltigkeit beträgt.

Von dieser allgemeinen Begriffserklärung ausgehend, untersucht Riemann, wodurch Mannigfaltigkeiten derselben Vielfachheit von einander, insbesondere der Raum von anderen gleicher Ausdehnung, unterschieden werden können. Er findet, dass es die beim Vergleichen der verschiedenen, in der

Mannigfaltigkeit enthaltenen Grössen auftretenden Massverhältnisse sind, welche ihr erst das besondere Gepräge geben. — Welche Merkmale zeichnen nun in dieser Hinsicht den Raum aus, wenn er dadurch, dass er sich uns ganz ursprünglich als eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen erweist, noch nicht derart characterisirt ist, dass Alles, was wir ihm zuzuschreiben gewohnt sind, mit Nothwendigkeit daraus hervorgeht?

Um eine solche Betrachtung überhaupt anstellen zu können, musste Riemann erst den allgemeinen Begriff der mehrfach ausgedehnten Grösse abstract definirt haben, da wir ja eine andere dreifach ausgedehnte Grösse als den Raum in unserer Anschauung nicht besitzen und daher stets geneigt sind, seinen Eigenschaften eine gewisse, ihnen nicht zukommende Allgemeinheit zuzuschreiben.

Aus der Thatsache nun, dass es besonderer Merkmale zur Characterisirung des Raumes bedarf, ist bestimmt zu schliessen, dass die Sätze der Geometrie aus reinen Begriffen nicht gefolgert werden können, da jene Merkmale erst der Erfahrung entnommen werden müssen; und es tritt nun die Aufgabe auf, möglichst einfache Voraussetzungen anzugeben, aus welchen sich die Eigenschaften des Raumes so bestimmen lassen, wie sie unserer Erfahrung entsprechen. Eine solche Aufgabe ist ihrer Natur nach nicht bestimmt, und es lässt sich auf mehrfache Art das Geforderte leisten. Immer aber werden die zu Grunde gelegten Thatsachen natürlich nur Hypothesen, d. h. allerdings der Erfahrung entsprechende, aber nicht an sich nothwendige Wahrheiten sein.

Ich kann hier nicht erörtern, wie Riemann, ausgehend von der ersten Annahme, dass die Linien unabhängig von der Lage eine Länge haben, d. h. durcheinander messbar sein sollen, zu einer Hypothese über das Differential der Länge gelangt, nämlich dass es durch

eine Quadratwurzel aus einem Differential-Ausdruck zweiten Grades in den Coordinaten darstellbar sei. Hierauf betrachtet er als einfachste Thatsache unserer Anschauung die Congruenz des Raumes in sich selbst.

Unsere Anschauung der räumlichen Objecte besitzt nämlich die Eigenthümlichkeit, dass sie jede Figur überall hin transportiren kann. Da wir diese Eigenschaft fortwährend benutzen, ohne dass sie sich aus dem Begriffe der dreifachen Ausdehnung allein folgern liesse, so müssen wir sie als eine der Erfahrung entlehnte Thatsache ansehen.

Um den Sinn hiervon in seinem vollen Umfange klarzulegen, ist es nothwendig, zu einer zweifachen Mannigfaltigkeit hinabzusteigen, deren Repräsentant eine Fläche sei.

Man kann aus einer Kugelfläche ein beliebiges Stück ausschneiden und es an jeder andern Stelle derselben Fläche auflegen; ebenso verhält es sich mit der Ebene. Bei einer beliebigen Fläche jedoch, schon bei dem Rotationsellipsoïd ist es nicht möglich. Ebenso wenig kann man im Allgemeinen verschiedene Flächen auf einander abwickeln.

Dieser Gegenstand, für die Theorie der Flächen von der grössten Bedeutung, war lange Zeit völlig im Dunkeln, bis ihn Gauss in seiner berühmten Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ in durchgreifender Weise erledigte. Gauss definirte den Begriff „Krümmungsmass“ durch eine Zahl für jeden Punkt einer Fläche in jener Allgemeinheit, welche den Character der von ihm in die Wissenschaft eingeführten Begriffe bildet, indem er zeigte, dass wenn Flächen und Flächenstücke sich auf einander abwickeln lassen, sie in den Punkten, welche zur Deckung kommen, denselben Werth des Krümmungsmasses haben. Diese Zahl variirt im Allgemeinen von Punkt zu Punkt.

Soll also eine Fläche die Eigenschaft haben, dass jedes irgendwie geformte Stück an jeder Stelle soll aufgelegt werden können, so muss ihr Krümmungsmass in jedem Punkte

durch dieselbe Zahl repräsentirt werden. Der absolute Werth dieser Zahl ist hierbei gleichgültig. Eine solche Fläche ist z. B. die Kugelfläche. — Kugelflächen von verschiedenen Radien haben zwar jede ein constantes Krümmungsmass, doch sind die Werthe von einander verschieden.

In analoger Weise lässt sich die Frage für höhere Mannigfaltigkeiten stellen und der Begriff des Krümmungsmasses entsprechend erweitern, wenn man, wie geschehen, einen Ausdruck des Längen-Differentiales zu Grunde legt. Im Allgemeinen wird das Krümmungsmass, wie bei der krummen Fläche, eine von Element zu Element variirende Zahl sein. Unser Raum repräsentirt sich uns nun als eine solche dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche in jedem Punkte dasselbe constante Krümmungsmass besitzt. Dies ist der analytische Ausdruck für die Unabhängigkeit der Körper vom Orte.[1])

Eine weitere Untersuchung müsste nun der Bestimmung des Werthes dieser Constanten gelten. Der Inhalt des Enklideischen Postulates (welches damit identisch ist, dass

---

[1]) Man ersieht, dass dem Parallelen-Postulat andere einfachere Voraussetzungen, wie die Verschiebbarkeit der Körper im Raume, vorausgehen, welche zwar ohne ausdrückliche Angabe benutzt werden, aber doch nur empirisch gewonnene Thatsachen enthalten. — Was überdiess das Axiom betrifft, dass zwei Gerade keinen Raum einschliessen, oder dass zwei Gerade sich nur in einem Punkte schneiden, so basirt unsere Gewissheit auf der Erfahrung, dass durch zwei gegebene Punkte nur eine Gerade gehen kann. Aber eine ähnliche Betrachtung könnte man auf die Kugel anwenden, wo der Irrthum offenbar ist. Auch da geht durch zwei Punkte nur ein grösster Kreis, ausgenommen, wenn die Punkte diametral liegen. Unsere Erfahrung in Bezug auf die Gerade lehrt freilich, dass durch zwei beliebig gewählte Punkte nur eine Gerade geht, d. h., dass zwei durch einen Punkt gehende Geraden nach beiden Seiten hin divergiren. Dies ist jedoch nur sicher, soweit der unserer Beobachtung zugängliche Theil des Raumes in Betracht kommt. Keineswegs aber ist damit dargethan, dass in einer Distanz, die ausserhalb des unserer Beobachtung zugänglichen Bereiches liegt, nicht wieder ein Convergiren stattfinden könnte.

die Summe der Winkel in jedem ebenen Dreiecke gleich zwei Rechten ist) ist nämlich keineswegs eine Folge der bisher aufgeführten Voraussetzungen. Vielmehr ergiebt es sich erst — wie man nachweisen kann — durch die Annahme, dass jene Constante der Null gleich ist. Ueber die Richtigkeit derselben ist aber darum volle Gewissheit nicht zu erlangen, weil ihre Prüfung nicht durch die Theorie, sondern durch die Erfahrung geschehen muss. Eine solche Prüfung kann immer nur annähernde Genauigkeit bieten.

Ich darf jetzt auf einen Punkt zurückkommen, den ich bereits kurz berührt habe, nämlich darauf, dass die Geometrie in ihren Folgerungen das Postulat zu bestätigen schien. Der Grund ist nunmehr ersichtlich. Der Raum ist eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, in welcher wir, unserer Anschauung gemäss, das Krümmungsmass constant annehmen. Das Postulat des Euklides bedeutet nichts Anderes, als dass dieser constante Werth gleich Null ist. Jedem andern Zahlenwerthe entspricht eine andere Mannigfaltigkeit mit andern Mass-Eigenschaften; jede für sich gestattet die consequente Durchführung einer Geometrie. Wenn also auch unser Raum eine von Null verschiedene Krümmung hätte, so wäre doch durch jenes Axiom ein in sich consequenter Begriff definirt, der allerdings, wenn auch nur unmerklich, von dem wirklichen Raume verschieden wäre. Daher einerseits die Uebereinstimmung der aus jener Annahme gezogenen Schlüsse unter einander, andererseits die Unmöglichkeit, sie durch die Erfahrung zu widerlegen.

Könnten wir zur Erklärung der Bewegungen der kosmischen Massen eine einfache Hypothese ausfindig machen, welche in ihren Folgerungen für die in dem Sonnen-Systeme vorkommenden Massen und Distanzen unmessbar wenig von der Newton's abweicht, so hätten wir zunächst kein Mittel zu entscheiden, welche die richtigere ist.

Zum Schlusse dieser Darstellung will ich noch auf die Erörterungen Riemann's, betreffend die Unendlichkeit des Raumes, in Kürze eingehen, weil sie mir am merkwürdigsten die Höhe der Abstraction in Riemann's Gedankengange zu kennzeichnen scheint.

Er sagt wörtlich:[1]) „Bei der Ausdehnung der Raumconstructionen in's Unmessbargrosse ist Unbegrenztheit und Unendlichkeit zu scheiden; jene gehört zu den Ausdehnungsverhältnissen, diese zu den Massverhältnissen. Dass der Raum eine unbegrenzte dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei, ist eine Voraussetzung, welche bei jeder Auffassung der Aussenwelt angewandt wird, nach welcher in jedem Augenblicke das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt und die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes construirt werden und welche sich bei diesen Anwendungen fortwährend bestätigt. Die Unbegrenztheit des Raumes besitzt daher eine grössere empirische Gewissheit, als irgend eine äussere Erfahrung. Hieraus folgt aber die Unendlichkeit keineswegs; vielmehr würde der Raum, wenn man Unabhängigkeit der Körper vom Ort voraussetzt, ihm also ein constantes Krümmungsmass zuschreibt, nothwendig endlich sein, sobald dieses Krümmungsmass einen noch so kleinen positiven Werth hätte."

Um diese Bemerkung zu verstehen, muss man sich vergegenwärtigen, worauf unsere Ueberzeugung von der Unendlichkeit des Raumes sich gründet. Es ist dies die Vorstellung, dass wir jede räumliche Figur, wie weit wir sie auch verschoben haben mögen, immer noch weiter verschieben können. Hieraus scheint nothwendig hervorzugehen, dass der Raum unendlich gross ist. Machen wir aber für einen Augenblick die Annahme, dass unsere Anschauung auf zwei Dimensionen beschränkt, dass sie — so zu sagen — eine blosse Flächen-

---

[1]) A. a. O. p. 147 f.

Anschauung sei; sie möge z. B. die Punkte einer Kugelfläche umfassen. Müssten wir dann nicht aus demselben Grunde, wie jetzt, unser Gesichtsgebiet für unendlich gross halten, weil wir über jeden, wo immer angenommenen Punkt noch weiter hinaus gehen können? Und dennoch deutet diess, wie das angeführte Bild beweist, nur auf die Unbegrenztheit hin. Wir haben also aus den Gründen, welche doch nur für die Unbegrenztheit sprechen, auf die Unendlichkeit des Raumes geschlossen. Erst Riemann hat auf den Unterschied dieser beiden Begriffe hingewiesen, der bis dahin, wie ich glaube, nicht bemerkt worden ist.

Nachdem Riemann's Schrift nach dem Tode ihres Verfassers erschienen war, entschloss sich Helmholtz eine Abhandlung [1]) der Oeffentlichkeit zu übergeben, in welcher er, von ebenso allgemeinen Betrachtungen ausgehend, sich die Aufgabe stellt, die bis jetzt stillschweigend zugelassenen Voraussetzungen, welche den Thatsachen unserer Anschauung entsprechen, in streng analytisches Gewand zu kleiden, aus welchen alsdann mit Nothwendigkeit die Sätze unserer Geometrie folgen. Diese Entwicklung unterscheidet sich von der Riemann'schen wesentlich nur dadurch, dass Helmholtz den von Letzterem mit einer gewissen Willkühr zur Grundlage gewählten Ausdruck des Längen-Elementes aus anderen, der Anschauung entnommenen Hypothesen herleitet. Die Annahme: „Der Raum ist unendlich", welche zwar von jeher gemacht, doch im Grunde nur als die der Unbegrenztheit gemeint und überhaupt als Beweismittel unbenutzt geblieben war, erweist sich auch da als aequivalent mit dem 11. Axiom des Euklides.

---

1) Göttinger Nachrichten 1868, p. 193—221.

Nachdem die Frage, der dieser Vortrag gewidmet ist, beinahe aufgehört hatte, das Interesse der gelehrten Welt auf sich zu ziehen, ist sie plötzlich von Männern der grössten wissenschaftlichen Bedeutung von Neuem angegriffen und zum ersten Male in ihrer wahren Form dargelegt und behandelt worden. Jahrhundertelanges Klügeln hätte sie nicht gefördert, erst musste jener Grad der Vollkommenheit in der Abstraction und dem Calcul erreicht sein, der die Frucht einer gewaltigen, ursprünglich gerade auf die äussersten Probleme der Wissenschaft gerichteten Geistesarbeit war. Von dem höheren Gesichtspunkte aus, den er durch den allgemeineren Begriff der mehrfach ausgedehnten Grösse gewonnen, erfasst Riemann den Raum als besonderen Fall. Ich könnte mich eines geläufigen Bildes von der Anhöhe bedienen, von der aus man das tiefer Gelegene besser überblickt, aber die Wissenschaft liefert ein bestimmteres Beispiel. Es giebt einen fundamentalen Satz in der ebenen Geometrie, der allen Versuchen, ihn ohne Einführung metrischer Begriffe zu erweisen, widerstanden hat. Einem genialen Geometer ist es gelungen, durch Zuhülfenahme der dritten Dimension die Schwierigkeit zu überwinden. So musste auch, damit das richtige Verständniss der Raumanschauung gewonnen werde, erst die Einführung und Untersuchung eines umfassenderen Begriffes vorangehen.

Druck von Heinrich Lindner in Breslau.

Im Verlage von **Maruschke & Berendt** in **Breslau** sind erschienen:

Anderssohn, Aurel, **Neueste Aufschlüsse** in der Hydraulik. 1870. Preis geheftet . . . . . 15 Sgr.

Gründung und Entwickelung der Breslauer Burschenschaft. Festgabe zu ihrer fünfzigjährigen Jubelfeier. 1867. Preis geheftet . . . 25 Sgr.

Grünhagen, Dr. Colmar, **Aus dem Sagenkreise Friedrichs des Grossen,** Gefahren und Lebensrettungen in den schlesischen Kriegen. 1864. Preis geheftet . . . . . 5 Sgr.

— **Ueber Städtechroniken** und deren zweckmässige Förderung durch die Communal-Behörden. 1865. Preis geheftet . . . . . 10 Sgr.

Hanko, J., **Die Erde in der Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft.** Populär verfasst. 1865. Preis geheftet . . . . . 16 Sgr.

Jäkel, Joseph, **Der Satz des zureichenden Grundes.** 1868. Preis geheftet . . . . . 1 Thlr. 10 Sgr.

Kuznik, Th., **Das metrische Maass und Gewicht.** Sachliche Erläuterungen zur neuen Maass- und Gewichts-Ordnung, nebst einer kurzen Anleitung zur praktischen Behandlung derselben in der Volksschule. Als Anhang: Die wichtigsten Regeln der Decimalbruch-Rechnung und Rechnungs-Beispiele. 1870. 7. Auflage. Preis geheftet . . . . . 6 Sgr.

— **Wandkarte der metrischen Maasse und Gewichte.** Ein Anschauungsmittel für Schulen. 1870. 7. Auflage. Preis . . . . . 6 Sgr.

Meyer, Lothar, **Die modernen Theorien der Chemie** und ihre Bedeutung für die chemische Statik. 1864. Preis geheftet . . . . . 22½ Sgr.

Peucker, Dr. A. Th., **Kurze theoret. prakt. Grammatik** der neugriechischen Sprache in ihrem Verhältniss zur altgriechischen nebst einer Chrestomathie. 1863. Preis geheftet . . . . . 15 Sgr.

Pinoff, Minna, **Reform der weiblichen Erziehung** als Grundbedingung zur Lösung der socialen Frage der Frauen. 1867. Preis geh. 22½ Sgr.

Poleck, Th., **Beiträge zur Kenntniss der chemischen Veränderungen** fliessender Gewässer. Mit einer Karte. 1869. Preis geheftet . 20 Sgr.

von Puttkamer, Freiherr, **Preussens Militair-Invaliden-Gesetzgebung** für die Grade vom Oberfeuerwerker, Feldwebel und Wachtmeister abwärts nach amtlichen Quellen zusammengestellt. Zweite bis zum 15. November 1870 ergänzte Ausgabe. 1871. Preis geheftet . . . . . 1 Thlr.

Richter, Eugen, (Abgeordneter für Königsberg), **Das preussische Staatsschuldenwesen** und die preuss. Staatspapiere. 1869. Preis geh. 2⅔ Thlr.

— **Das neue Gesetz, betreffend die Consolidation** preussischer Staatsanleihen mit den Ausführungsbestimmungen erläutert. (Dieses Buch bildet zugleich den Nachtrag zu dem vorhergehenden Werke. 1870. Preis geheftet . . . . . 10 Sgr.

Runge, W., **Ueber Betheiligung der Arbeiter am Reingewinn** industrieller Unternehmungen. 1869. Preis geheftet . . . . . 7½ Sgr.

Wachler, Ludwig, Kreisrichter. **Zur rechtlichen Stellung der Frauen.** 1869. Preis geheftet . . . . . 6 Sgr.

Wittiber, Dr., Oberlehrer. **Sammlung trigonometrischer Aufgaben** nebst Auflösungen.

I. Theil. Aufgaben. 1864. Preis geheftet . . . . . 18 Sgr.
II. Theil. Auflösungen. 1864. Preis geheftet . . . . 22½ Sgr.

Wossidlo, Dr., **Grundriss der Mineralogie für Schulen.** I. Hälfte: Kennzeichenlehre. 1869. Preis geheftet . . . . . 6 Sgr.

Druck von Heinrich Lindner in Breslau.